רמזים לפתרון החלק האמריקאי

שאלה 1

הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)}}$ הוא:

א. 1 **ב.** 0 **ג.** 2 **ד.** ∞ **ה.** $-\infty$

רמזים לפתרון:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\sin x-x}{x}}=e^0=1$$

מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}=e$ ולפי כלל לופיטל נקבל,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\ln(1+x)}\underset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{1+x}}=0$$

שאלה 2

נתונים הטורים

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right),\qquad II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

א. שני הטורים מתכנסים.

ב. שני הטורים אינם מתכנסים.

ג. I אינו מתכנס ו II מתכנס.

ד. I מתכנס ו II אינו מתכנס.

רמזים לפתרון:

נבדוק התכנסות הטור $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$

נשים לב כי $\frac{1}{n^2},\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)>0$ ולכן לפי מבחן השוואה גבולי נרצה לחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

נרצה להשתמש בכלל לופיטל ולכן נחשב את הגבול:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arctan t\right)}{\frac{1}{t}}\underset{L}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arctan t\right)\frac{-1}{1+t^2}}{\frac{-1}{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arctan t\right)\frac{t^2}{1+t^2}=1$$

ולכן לפי אריתמטיקה

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan t\right)}{\frac{1}{t^2}}=1$$

ולכן לפי משפט היינה $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)}{\frac{1}{n^2}}=1$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$ מתכנס.

נבדוק התכנסות הטור $II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\tan\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\infty$$

איבר כללי אינו שואף לאפס שזהו תנאי הכרחי להתכנסות כל טור, ולכן הטור אינו מתכנס.

שאלה 3

תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\,(x-1)^n$

א. $[0,2)$.

ב. $[0,2]$.

ג. $(0,2]$.

ד. $(0,2)$.

רמזים לפתרון:

נחשב את רדיוס ההתכנסות,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

נרצה להשתמש בכלל לופיטל ולכן נחשב את הגבול:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(t+1)}{\ln t}\underset{L}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{1+t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{1+t}=1$$

ולכן לפי משפט היינה $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=1$

ולכן $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$.

לכן הטור מתכנס כאשר $-1 < x-1 < 1$, נבדוק התכנסות בקצוות:

עבור $x-1=1$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ ועבור $x-1=-1$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\,(-1)^n$

שני הטורים מתבדרים כי איבר כללי לא שואף לאפס לכן תחום ההתכנסות הוא $-1 < x-1 < 1$ כלומר $0 < x < 2$.

שאלה 4

נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$ אזי:

א. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(\sin c)=c$

ב. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f^2(c)\cdot\tan(c+1)=c$.

ג. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)+1=c$.

ד. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)\cdot\ln(c+3)=c$.

ה. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)\cdot e^c=c$.

רמזים לפתרון:

א. נגדיר $g(x)=f(\sin x)-x$,

הפונקציה רציפה ב $[0,1]$ כי היא הרכבה של רציפות, ומתקיים $g(0)=f(0)\geq 0$ וגם $g(1)=f(\sin 1)-1\leq 0$,

אם $g(0)=0$ או $g(1)=0$ אז סיימנו, אחרת $g(1)<0<g(0)$,

ולכן לפי משפט עה"ב קיימת $c\in(0,1)$, כך ש $g(c)=0$ ולכן $f(\sin c)=c$.

ב. נגדיר $g(x)=f^2(x)\cdot\tan(x+1)-x$,

הפונקציה אינה רציפה ב $[0,1]$ כי היא לא מוגדרת כאשר $x=\frac{\pi}{2}-1$, ומתקיים $g(0)=f^2(0)\tan 1\geq 0$ וגם $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^-}g(x)=\infty$.

לכן קיימת פונקציה חיובית ממש בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}-1\right)$ עבורה לא תהיה בהכרח נקודה כנדרש.

כמו כן $g(1)=f^2(1)\tan 2-1\leq 0$ וגם $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^+}g(x)=-\infty$.

לכן קיימת פונקציה שלילית ממש בקטע $\left(\frac{\pi}{2}-1,1\right]$ עבורה לא תהיה בהכרח נקודה כנדרש.

ג. נגדיר $g(x)=f(x)+1-x$,

הפונקציה רציפה ב $[0,1]$ כי היא חיבור וחיסור של פונקציות רציפות,

ומתקיים $g(0)=f(0)+1>0$ וגם $g(1)=f(1)+1-1\geq 0$.

לכן קיימת פונקציה חיובית ממש בקטע עבורה לא בהכרח קיימת נקודה כנדרש.

ד. נגדיר $g(x) = f(x) \cdot \ln(x+3) - x$,

הפונקציה רציפה ב $[0,1]$ כי היא מכפלה וחיסור של פונקציות רציפות, ומתקיים $g(0) = f(0)\ln 3 \geq 0$

אבל $g(1) = f(1)\ln 4 - 1$ יכול להיות חיובי אם למשל $f(1) = 1$ או שלילי אם למשל $f(1) = 0$,

לכן קיימת פונקציה חיובית ממש בקטע עבורה לא בהכרח קיימת נקודה כנדרש.

ה. נגדיר $g(x) = f(x) \cdot e^x - x$,

הפונקציה רציפה ב $[0,1]$ כי היא כפל וחיסור של פונקציות רציפות,

ומתקיים $g(0) = f(0) \geq 0$ אבל $g(1) = f(1) \cdot e - 1$ יכול להיות חיובי אם למשל $f(1) = 1$ או שלילי אם למשל $f(1) = 0$,

לכן קיימת פונקציה חיובית ממש בקטע עבורה לא בהכרח קיימת נקודה כנדרש.

שאלה 5

ערך האינטגרל $\int_1^e \frac{1}{x\left(\ln^{0.5}(x)\right)} dx$

א. 0 **ב.** 1 **ג.** 2 **ד.** 3 **ה.** 4

רמזים לפתרון:

זהו אינטגרל מוכלל כי הפונקציה אינה חסומה בסביבה ימנית של $x = 1$.

לכן,

$$\int_1^e \frac{1}{x\left(\ln^{0.5}(x)\right)} dx = \lim_{t \to 1^+} \int_t^e \frac{1}{x\left(\ln^{0.5}(x)\right)} dx \underset{*}{=} \lim_{t \to 1^+} \int_{\ln t}^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \lim_{t \to 1^+} 2\sqrt{u}\Big|_{\ln t}^1 = 2$$

(*) ע"י הצבה: $u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x}$